Enunțuri: (Carte Traian Tămâian)

(P1) $x, y, z > 0$. Arătați că

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right)$$

Caz egalitate?

(P2) $a, b, c > 0$. Arătați că

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}-\frac{a^3+b^3+c^3}{6}\le 1$$

Caz egalitate?

(P3) $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x^2+y^2+z^2\le 9$. Arătați că

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+yz+3}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+zx+3}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+xy+3}}\ge 1$$

(P4) Arătați că șirul $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ este crescător, iar șirul $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ e descrescător.

(P5) Determinați $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a.î. $f(x)+f([x])+f(\{x\})=2x$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$

(P6) S. s. det $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu $xf(x)+yf(y)>xy+f(x)\cdot f(y)$, $(\forall)\, x, y\in\mathbb{R}$ cu $x\neq y$

(P7) Fie $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ care duce orice progresie aritmetică într-un șir monoton. Arătați că f e monotonă

(P8) Fie $(x_n)_n$ un şir de numere naturale nenule în care fiecare număr apare cel mult o dată.

Arătaţi că există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $(\forall)\ M \geq N$

$$\sum_{i=N}^{M} \frac{1}{x_i(x_i+1)} < \frac{1}{100}.$$

(P9) Determinaţi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a.î.

$$f(x+y) = f(x)+f(y)$$
$$f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y) \quad (\forall)\ x,y\in\mathbb{R}$$

(P10) Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, $k\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq n-2$ şi $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{N}^*$ distincte 2 câte 2

Demonstraţi că, dacă

$$a_1+a_2+\dots+a_n \geq \frac{n^2+n+2k}{2},$$

atunci printre $a_1, a_2, \dots a_n$ există $n-k$ nr. naturale consecutive

(P11) Fie ABCD înscris în cercul de centru O şi H, K ortocentrele ΔACD, resp. ΔBCD. Fie L mij [AB].
Ştiind că O e centrul de greutate ΔHKL, arătaţi ABCD trapez isoscel.

Soluții

P1

$$\frac{x^2+yz}{2} \geq x\sqrt{yz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} = \frac{\sqrt{yz}}{2xyz} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{y+z}{2}}{2xyz} =$$

$$= \frac{y+z}{4xyz}$$

$$\sum \frac{1}{x^2+yz} \leq \frac{2(x+y+z)}{4xyz} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right)$$

P2

$$\sum \frac{ab}{a+b} \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{6}+1 = \sum \frac{a^3+b^3+4}{12}$$

Arătăm $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a^3+b^3+4}{12}$

$$12ab \leq (a+b)(a^3+b^3+4)$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$a^3+b^3+4 \geq 2\sqrt{a^3b^3}+4 \geq$$

$$(a+b)(a^3+b^3+4) \geq 4\cdot\sqrt{ab}\cdot\left((\sqrt{ab})^3+2\right)$$

$$(\sqrt{ab})^3 + 2 = (\sqrt{ab})^3 + 1 + 1 \geq 3 \cdot \sqrt{ab}$$

Deci $(a+b)(a^3+b^3+4) \geq 12ab$ $\square$

P3

$$\sum \frac{1}{\sqrt{x^2+yz+3}} \geq \frac{(1+1+1)^2}{\sum \sqrt{x^2+yz+3}} = \frac{9}{\sum \sqrt{x^2+yz+3}}$$

Pornim de la caz de egalitate

$$\left(\sum \sqrt{x^2+yz+3}\right)^2 = \left(\sum 1 \cdot \sqrt{x^2+yz+3}\right)^2 \leq$$

$$\leq (1^2+1^2+1^2) \cdot (x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz+9) \leq$$

$$\leq 3 \cdot (9+9+9) = 3 \cdot 27 = 81$$

Căci $xy+yz+xz \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9$ (ip.)

Rezultă:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{x^2+yz+3}} \geq \frac{9}{\sqrt{81}} = 9$$

P4

a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \le \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \iff$

$\iff \sqrt[n+1]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}} \le \frac{n+2}{n+1}$

$$\sqrt[n+1]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\cdot 1} \underset{\text{med.}}{\overset{\text{ineg.}}{\le}} \frac{\frac{n+1}{n}\cdot n+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \checkmark$$

b) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \ge \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \iff$

$\iff \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \le \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} \iff$

$\iff \sqrt[n+2]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} \le \frac{n+1}{n+2}$

$$\sqrt[n+2]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1} \underset{\text{med.}}{\overset{\text{ineg.}}{\le}} \frac{\frac{n}{n+1}\cdot(n+1)+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \checkmark$$

Ob: $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \le \ldots \le \ldots \le \ldots \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$

P5 $x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3f(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$

$x \in \mathbb{Z}$

$f(x)+f(x)=2x \Rightarrow f(x)=x$

Deci $f([x])=[x]$, $(\forall) x$

$x \in [0,1)$

$$2x = f(x) + \underbrace{f([x])}_{=0} + \underbrace{f(\{x\})}_{f(x)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2f(x)=2x \Rightarrow f(x)=x.$

Deci $f(\{x\})=\{x\}$, $(\forall) x$.

Rămâne că, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$

$f(x)+[x]+\{x\}=2x \Rightarrow f(x)=x.$

P9 $f(0)=f(0)+f(0) \Rightarrow f(0)=0$

$f(n \cdot x)=n \cdot f(x)$, $(\forall) n \in \mathbb{Z} \rightarrow$ inducție

$f\left(\frac{m}{n} \cdot x\right)=?$

$f(m \cdot x)=f\left(n \cdot \frac{m}{n} \cdot x\right)=n \cdot f\left(\frac{m}{n} \cdot x\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow m \cdot f(x) = n \cdot f\left(\frac{m}{n} \cdot x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{m}{n} \cdot x\right) = \frac{m}{n} \cdot f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(q \cdot x) = q \cdot f(x), \ (\forall)\, x \in \mathbb{R}$$
$$(\forall)\, q \in \mathbb{Q}$$

Până acum nu am folosit înmulțirea, adică $f(x) \cdot f(y) = f(xy)$.

$f \equiv 0$ îndeplinește.

Dacă $f \not\equiv 0 \Rightarrow (\exists)\, x_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) \neq 0$.

Dacă $(\exists)\, y \in \mathbb{R}^*$ cu $f(y) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = f\left(y \cdot \frac{x}{y}\right) = \underbrace{f(y)}_{=0} \cdot f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

Contradicție.

Deci $f(y) \neq 0, (\forall)\, y \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) \\ f(1) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) = 1$$

Deci $f(q) = q \cdot f(1) = q$, $(\forall)\, q \in \mathbb{Q}$

Fie $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = f(\sqrt{x}) \cdot f(\sqrt{x}) =$

$$= \Big(f(\underbrace{\sqrt{x}}_{\neq 0})\Big)^2 > 0$$

Deci pt. $x < y$

$$f(y) = f(x) + \underbrace{f(y-x)}_{>0} > f(x)$$

Deci f strict $\nearrow$

De acum folosim doar $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(q) = q$ pe $\mathbb{Q}$ și $f \nearrow$.

Pp. abs. $(\exists)\; x \in \mathbb{R}$ cu $f(x) \neq x$.

<u>Caz 1</u> $\quad x < f(x)$

$\mathbb{Q}$ dens în $\mathbb{R} \Rightarrow (\exists)\; q \in \mathbb{Q}$ $\quad x < q < f(x)$

Aplic f care e $\nearrow$ $\quad f(x) < f(q) = q$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Contradicție.

Caz 2 $\quad x > f(x)$

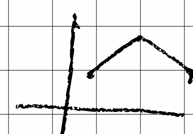
$$\left.\begin{array}{l} (\exists)\, q \in \mathbb{Q} \quad x > q > f(x) \\ f(x) > f(q) = q \end{array}\right| \Rightarrow \text{Contradicție.}$$

Deci $f(x) = x, (\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

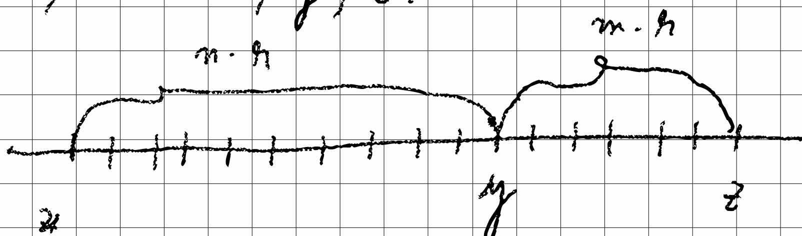
P 7 Presupunem că f nu e monotonă.

Atunci există $x, y, z \in \mathbb{Q}$ cu

$$x < y < z \text{ și } \left\{ \begin{array}{l} f(x) > f(y) < f(z) \\ \text{sau} \\ f(x) < f(y) > f(z) \end{array} \right.$$



Construim o progresie aritmetică ce conține x, y, z.



Vrem $m \cdot r = z - y$ $\qquad m, n \in \mathbb{N}^*$

$n \cdot r = y - x$

$$\left.\begin{aligned} \text{Fie } z - y &= \frac{P}{Q} \\ y - x &= \frac{R}{Q} \end{aligned}\right\} \quad P, Q, R \in \mathbb{N}^* \text{ aducem la ac. numitor.}$$

Luăm $r = \dfrac{1}{Q}$ $\qquad m = P$, $n = R$

Notă: E esențial pt. construcția aceasta că $x, y, z \in \mathbb{Q}$

Deci progresia aritm. cu primul termen inițial și rația r conține și pe y și pe z $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &f(x) \le f(y) \le f(z) \\ &\text{sau} \\ &f(x) \ge f(y) \ge f(z) \end{aligned}\right. \qquad \text{contradicție.}$$

(P8) Dacă șirul ar fi chiar $\mathbb{N}$:

$1, 2, \ldots, n, \ldots$

$$\sum_{i=N}^{M} \frac{1}{x_i \cdot (x_i+1)} = \sum_{i=N}^{M} \frac{1}{i \cdot (i+1)}$$

$$= \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1} \cdots + \frac{1}{M} - \frac{1}{M+1}$$

$$= \frac{1}{N} - \frac{1}{M+1} \leq \frac{1}{N}, (\forall) M \geq N.$$

În acest caz, alegem $N = 100$.

Revenim la cazul general:

Mulțimea $\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \in \{1, 2, \ldots 99\}\}$ e finită (are exact 99 elemente) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists) N = \max\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \in \{1, 2, \ldots, 99\}\} + 1$

Atunci $(\forall) n \geq N$ avem $x_n \geq 100$.

Fie $M \geq N$. Reordonăm mulțimea $\{x_N, x_{N+1}, \ldots, x_M\}$ și obținem:

$$\{x_N, x_{N+1}, \dots, x_M\} = \{a_N, a_{N+1}, \dots, a_M\}$$

cu $a_N < a_{N+1} < \dots < a_M$

$$a_N \geq 100 \Rightarrow a_{N+1} \geq 101 \Rightarrow a_{N+2} \geq 102 \dots$$

$$\Rightarrow a_M \geq 100 + M - N$$

$$\sum_{i=N}^{M} \frac{1}{x_i(x_i+1)} = \sum_{i=N}^{M} \frac{1}{a_i(a_i+1)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{100 \cdot 101} + \frac{1}{101 \cdot 102} + \dots + \frac{1}{(100+M-N)(100+M-N+1)} =$$

$$= \frac{1}{100} - \frac{1}{101} + \frac{1}{101} - \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{100+M-N} - \frac{1}{100+M-N+1}$$

$$= \frac{1}{100} - \frac{1}{101+M-N} < \frac{1}{100} \quad \square$$

(P6) $x f(x) + y f(y) \geq xy + f(x)\cdot f(y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\big(f(x) - y\big) + f(y)\big(y - f(x)\big) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \big(f(x) - y\big)\big(f(y) - x\big) < 0$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$
$x \neq y$

Deci $f(x) \neq y$, $(\forall)\, x \neq y \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = x, (\forall)\, x \in \mathbb{R}$

(P10) Presupunem $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow a_i \geq i, (\forall)\, i = \overline{1,n}$

Dacă pt. un $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$a_j > j \Rightarrow a_j \geq j+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{j+1} \geq j+2 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_n \geq n+1$

Deci $a_1 + a_2 + \dots + a_j + \dots + a_n \geq$

$\geq 1 + 2 + \dots + (j-1) + (j+1) + (j+2) + \dots + (n+1) =$

$= \dfrac{n(n+1)}{2} + (n - j + 1)$

Deci $\dfrac{n^2+n+2k}{2} \geq \dfrac{n^2+n}{2} + (n-j+1) \Rightarrow$

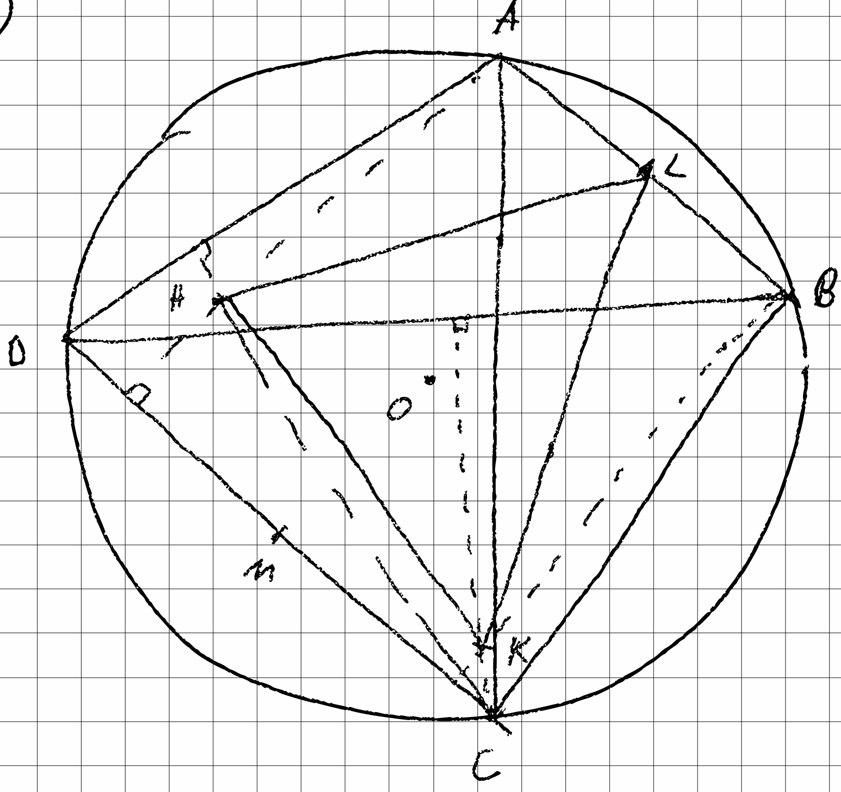
$\Rightarrow k \geq n-j+1 \Rightarrow j \geq n-k+1.$

Deci pt. $i \leq n-k$ $a_i = i$,

adică $a_1, a_2, \dots a_{n-k}$ sunt

nr. nat. consecutive $\square$

P11



$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD}$

$\vec{OK} = \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$

$\vec{OL} = \dfrac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$

O – centrul de greutate $\Delta HKL \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{OH} + \vec{OK} + \vec{OL} = \vec{0}$

$\vec{0} = \vec{OH} + \vec{OK} + \vec{OL} = \frac{3}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) + 2(\vec{OC} + \vec{OD})$

$2(\vec{OC} + \vec{OD}) = -\frac{3}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = -3\vec{OL}$

$\vec{OC} + \vec{OD} = 2\vec{OM}$, unde M – mij $[CD]$

$4\vec{OM} = -3\vec{OL} \Rightarrow O, M, L$ coliniare.

$\left.\begin{array}{l} L \text{ – mij } [AB] \\ O \text{ – centrul cercului} \end{array}\right\} \Rightarrow OL \perp AB$

Analog, $OM \perp CD$

$\Rightarrow AB \parallel CD. \Rightarrow ABCD$ - trapez

$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ - trapez} \\ ABCD \text{ - inscriptibil} \end{array}\right\} \Rightarrow$ trapez isoscel $\square$